235

Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

I] Interversion limite-limite

1] Suites de fonctions et limites

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle, $(f_n : I \to \mathbb{R})$, $a \in I$

Théorème 1 : (de la double limite) Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$ et $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$.

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

Théorème 2 : Si (f_n) converge uniformément vers $f : I \to E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.

Alors : f est continue sur I

Contrexemple 3 : L'hypothèse d'uniforme convergence est vitale. Pour $\left(f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-nx}\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \longrightarrow f : \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}$ avec f_n continues mais f pas continue.

Théorème 4 : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur I, (f_n) converge simplement vers $f : I \to E$ et (f_n') converge uniformément sur I.

Alors : $f' = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$

Contrexemple 5 : La convergence uniforme de (f_n') est vitale. Pour $\left(f_n : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x^2 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \xrightarrow[+\infty]{} f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|\end{array}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable mais f_n' ne converge pas uniformément et $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

2] Séries de fonctions et limites

Théorème 6 : (d'interversion limite-série) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n$ et la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors : $\sum l_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

Remarque 7 : Autrement dit, on peut intervertir les signes $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$: $\lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$.

Théorème 8 : (de continuité sous le signe somme) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue [et] $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors : $\sum f_n$ est continue.

Exemple 9 : La fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

Théorème 9 : (de dérivation sous le signe somme) Si la série $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge uniformément

Alors : $\forall x \in I$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$ i.e. $\frac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Exemple 10 : $\forall x \in]1;+\infty[$, $\zeta'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{n^x}$

II] Interversion intégrale-intégrale

1] Intégrales de suites et de séries de fonctions

Soit $(X; \mathcal{A}; \mu)$ espace mesuré, $(f_n : X \to \mathbb{R}_+)$.

Théorème 11 : (de convergence monotone) Si les f_n sont mesurables

Alors : $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim \int_X f_n \, d\mu \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Lemme 12 : (de Fatou) Si les f_n sont mesurables.

Alors : $0 \leq \int_X \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_X f_n \, d\mu \leq +\infty$

Corollaire 13 : Si $(f_n) \in L^1(\mu)$ converge simplement vers f et vérifie $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$

Alors : $f \in L^1(\mu)$

Application 14 : Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et en 1 et dérivable λ-p.p. sur $[0;1]$.

Alors : $\int_0^1 f'(x)\,dx \leq f(1) - f(0)$

2] Théorème de convergence dominée

[BrP] VIII.1

Théorème 15: (de convergence dominée) Si $(f_n)\in L^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ vérifie f_n converge vers f μ-p.p. et il existe $g\in L^1(\mu)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\le g$ μ-p.p.
Alors: $f\in L^1(\mu)$ et $\lim_{n\to+\infty}\int_X|f_n-f|d\mu=0$. En particulier, $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$

Remarque 16: On n'a pas besoin de la convergence uniforme ! Pour $\left(f_n: \begin{array}{l}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \min\left(\frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{x}};n\right)\end{array}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, (f_n) n'est pas uniformément convergente mais $\forall x\in]0;1]$, $|f_n(x)|\le g(x):=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathbb{1}_{]0;1]}$. Par le théorème, on peut alors intervertir lim et intégrale.

VIII.2

Théorème 17: Soit $(\varphi_n: X\to\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ mesurables.
Alors: (1) Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n\ge 0$, alors $\int_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\right)d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X\varphi_n d\mu\right)$
(2) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_X|\varphi_n|d\mu<+\infty$, alors $\int_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi_n\right)d\mu=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_X\varphi_n d\mu\right)$

Application 18: (lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.
Alors: Si $\sum_{n=0}^{+\infty}\mu(A_n)<+\infty$, alors $\mu(\limsup_{n\in\mathbb{N}}A_n)=0$

Application 19: (continuité de l'intégrale par rapport à la mesure) Soit $f\in L^1(\mu)$.
Alors: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\backslash\forall A\in\mathcal{A},\ \mu(A)\le\delta\Rightarrow\int_A|f|d\mu\le\varepsilon$

3] Régularité des intégrales à paramètre

[BrP] VIII.3

Théorème 20: (de continuité sous le signe intégrale) Soit $f: E\times X\to\mathbb{K}$
(i) $\forall u\in E$, $x\mapsto f(u;x)$ est mesurable sur X
(ii) pour μ-presque tout $x\in X$, $u\mapsto f(u;x)$ est continue sur E
(iii) il existe $g\in L^1(\mu)$ tel que: $\forall u\in E$, $\forall\mu$-p.t. $x\in X$, $|f(u;x)|\le g(x)$.
Alors: $F: \begin{array}{l}E\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X f(u;x)dx\end{array}$ est continue sur E.

VIII.3 [BrP]

Théorème 21: (de dérivation sous le signe intégrale) Soit $f: I\times X\to\mathbb{K}$ avec $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, tel que:
(i) $\forall u\in I$, $x\mapsto f(u;x)\in L^1(\mu)$
(ii) pour presque tout $x\in X$, $u\mapsto f(u;x)$ est dérivable sur I
(iii) il existe $g\in L^1(\mu)$ tel que: $\forall u\in I$, $\forall\mu$-p.t. $x\in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial u}(u;x)\right|\le g(x)$
Alors: $F: \begin{array}{l}I\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X f(u;x)d\mu(x)\end{array}$ est dérivable sur I de dérivée:
$F': \begin{array}{l}I\to\mathbb{K}\\ u\mapsto\int_X\frac{\partial f}{\partial u}(u;x)d\mu(x)\end{array}$

[Isen]

Application 22: (résolution de l'équation de la chaleur) Soit $u_0\in L^2([0;2\pi])$ et $\forall n\in\mathbb{Z}$, $d_n:=c_n(f)$ ses coefficients de Fourier.
Alors: $\exists! u: \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\mathcal{C}^\infty$ telle que:
(1) À $t>0$ fixé, $u(t;\cdot)$ est 2π-périodique
(2) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$
(3) $\partial_t u=\Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (équation de la chaleur)
(4) $u(t;\cdot)$ converge en norme L^2 vers u_0 lorsque $t\to 0$.

III.1.5 [OA]

Théorème 23: (d'holomorphie sous le signe intégrale) Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $U\subseteq\mathbb{C}$ ouvert et $f: U\times I\to\mathbb{C}$ telle que:
(i) $\forall z\in U$, $x\mapsto f(z;x)$ est continue sur I
(ii) $\forall x\in I$, $z\mapsto f(z;x)$ est holomorphe sur U
(iii) $\forall K\subseteq U$ compact, $\exists g\in L^1(\mu)\backslash\forall(z,x)\in U\times I$, $|f(z;x)|\le g(x)$.
Alors: $F: \begin{array}{l}U\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\int_I f(z;x)dx\end{array}$ est holomorphe et on a:
$\forall z\in U$, $F^{(k)}(z)=\int_I\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z;x)dx$

Définition 24: Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle. On appelle fonction poids toute fonction $\rho: I\to\mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I|x|^n\rho(x)dx<+\infty$. On note $L^2(I;\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue muni du produit scalaire
$\langle f;g\rangle_\rho:=\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$

III.1.5 [OA]

Application 25 : Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle, $\rho : I\to\mathbb{R}$ fonction poids telle que : $\exists a>0 \mid \int_I e^{a|x|}\rho(x)dx<+\infty$.
Alors : la famille (P_n) issue du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$.

Contrexemple 26 : L'hypothèse sur ρ est vitale.
Pour $I=\mathbb{R}_+$ et $w(x)=x^{-\ln(x)}$, la famille des polynômes orthogonaux associés à w ne forme pas une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+;w)$.

III) Interversion intégrale - intégrale

1) Théorèmes de Fubini

XI.3

Théorème 27 : (de Fubini-Tonelli) Soit $f : X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable avec μ et ν mesures σ-finies sur X et Y respectivement.
Alors : $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$

XII.2

Application 28 : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Application 29 : Le volume de la boule unité sur $\mathbb{R}^d$ est : $\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(\frac{d}{2})!}$ si d est pair et $\frac{2^d\,\pi^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!}$ si d est impair.

XI.3

Théorème 30 : (de Fubini) Soit $f\in L^1(\mu\otimes\nu)$ toujours avec μ et ν deux mesures σ-finies.
Alors : $\int_{X\times Y} f\,d\mu\otimes\nu = \int_X\left(\int_Y f\,d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f\,d\mu(x)\right)d\nu(y)$

[B?]

Application 31 : (formule d'intégration par parties) Soit $f,g\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
Alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_0^x f(t)G(t)dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t)dt$
avec $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $G(x)=\int_0^x g(t)dt$

2) Application à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

XI.5 [I?]

Définition 32 : On appelle espace de Schwartz l'espace :
$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \mid \forall k,n\in\mathbb{N},\ \sup_{\mathbb{R}}|x^n f^{(k)}(x)|<+\infty\}$

Remarque 33 : $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Exemple 34 : $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto e^{-ax^2}\end{array}$ pour $a>0$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais pas $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$

[Isen]

Théorème 35 : L'application $\mathcal{F} : \begin{array}{l}\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})\\ f\mapsto\left[\xi\mapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}f(x)dx\right]\end{array}$ est surjective

Théorème 36 : (d'inversion de Fourier) Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f)\in L^1(\mathbb{R})$.
Alors : $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f\circ(-id)$

Application 37 : $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Théorème 38 : (de Plancherel) Soit $\mathcal{P} : \begin{array}{l}\mathcal{S}(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})\\ f\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f)\end{array}$
Alors : $\mathcal{P}$ est bien définie, et il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

Références :

[El Am] Suites et séries numériques / de fonctions - El Amrani
[Bri] Analyse Théorie de l'intégration - Briane
[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann
[OA] Objectif Agrégation - Beck
[Li] Cours d'analyse fonctionnelle - Li